

# Intromatte för optikerstudenter 2018

Rabia Akan  
rabiaa@kth.se

Av Robert Rosén (2012). Ändringar av Daniel Larsson, Jakob Larsson, Emelie Fogelqvist, Simon Winter och Rabia Akan (2013 - 2017).

## Kursmål

Efter intromatten vill vi att du inom matematik skall känna dig säker på att kunna följande. Exempel på uppgifter finns inom parenteser.

### 1. Bråkräkning

- a. Addition/subtraktion och multiplikation med bråk, gemensamma nämnare.

("Beräkna bråket utan miniräknare  $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{2}$ ").

- b. Beräkningar med flera bråkstreck. ("Beräkna bråket utan miniräknare")

$$\frac{\frac{6}{5} + \frac{-4}{3}}{\frac{2}{5}}$$

### 2. Algebra

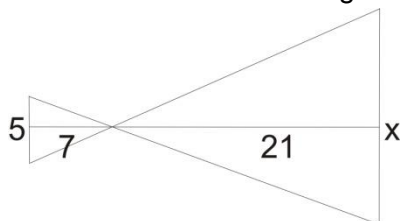
- a. Lösa ekvationer med bråk. ("Lös ekvationen nedan med avseende på  $x$ ")

$$\frac{3 - 17y^2}{5 - 6x} = \frac{4r + 3y}{2x + 7}$$

- b. Ställa upp ekvationer utifrån problemtext, avgöra vad som är sökt och vad som är okänt. ("Sätt upp ekvationen för antalet bakterier i ett labb, givet att de är 10 000 från början per skål och att varje timme delas en bakterie och blir två").

### 3. Geometri

- a. Kunna arbeta med likformiga trianglar. ("Beräkna höjden  $x$  i figuren nedan).



### 4. Trigonometri

- a. Använda sinus, cosinus och tangens för att bestämma sidlängderna i rätvinkliga trianglar ("En vinkel i en rätvinklig triangel är  $30^\circ$ . Närliggande katet är 5 mm lång. Hur lång är hypotenusan?")

- b. Kunna omvandla mellan radianer och grader.

- c. Kunna rita upp sinus- och cosinusfunktioner. ("Rita upp  $4 \sin(3x - 40)$ ")

- d. Känna till småvinkelapproximationen ( $\sin(w) \approx w$  för små vinklar).

### 5. Kunna hantera miniräknaren (som alltid kan vara inställd på att räkna i grader!)

- a. Exempel: slå in  $\sin(30)$ ,  $x^3$ , hantera bråk och parenteser rätt (" $0.25/(1-0.25)$ ").

### 6. Proportionalitet

- a. Förstå innebörden av "A är proportionell mot B" (Notation:  $A \propto B$ , som även kan skrivas  $A = k \cdot B$ , där  $k$  är en konstant).

- b. Kunna beräkna *proportionerlig förändring*. ("Om radien på en sfär dubblas, hur ändras volymen?").

### 7. Procenträkning

- a. Kunna uttrycka förändringar i procent ("Om förstoringen i ett optiskt system ökar från 2 till 3, vad blir ökningen i procent?")

- b. Kunna beräkna *upprepade procentuella förändringar*. ("Om priset först ökar med 20% och därefter minskar med 20%, vad blir slutpriset?").

## Bråkräkning

Förenkla bråken nedan utan miniräknare.

1.  $\frac{7}{3} + \frac{5}{2}$

2.  $\frac{1}{4} - \left(-\frac{8}{9}\right)$

3.  $\frac{5}{3} + \frac{12}{16}$

4.  $\frac{6}{5} - \frac{2}{3}$

5.  $\frac{2}{3} + \frac{-2}{9}$

6.  $\frac{36}{45} + \frac{9}{27}$

7.  $\frac{12}{9} + \frac{25}{30}$

8.  $-\frac{12}{33} + \frac{4}{22}$

9.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

10.  $\frac{2}{8} + \frac{4}{3} + \frac{10}{-5}$

11.  $\frac{6}{15} - \left(\frac{5}{20} - \frac{4}{5}\right)$

12.  $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$

13.  $\frac{2}{11} \cdot \frac{9}{3}$

14.  $\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right)$

15.  $\frac{11}{22} \cdot \frac{24}{64}$

16.  $\frac{14}{27} \cdot \frac{-9}{28}$

17.  $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} + \frac{8}{7}$

18.  $\frac{7}{14} \cdot \frac{9}{3} + \frac{6}{5}$

19.  $\frac{5/3}{9}$

Miniräknarkunskap: Räkna först talen nedan utan miniräknare. Testa sedan att slå in dem på miniräknaren efteråt, för att se att du får samma svar. Tänk på parenteserna!

20.  $\frac{8/21}{4/7}$

21.  $\frac{5/4 + 2/3}{1/7}$

22.  $\frac{3/2 + 5/8}{6/9 + 7/3}$

23.  $\frac{3/7 \cdot 4/5}{6/14 \cdot 20/3}$

## Algebra

Lös ut  $x$  ur ekvationerna nedan

1.  $3x + 6 = 0$

2.  $6(2x + 7) = \frac{24}{2}$

3.  $y = 5x + 20$

4.  $y^2 + x^2 = 25$

5.  $3k(x^2 + 2) = 4y$

6. Lös ut  $l$ :  $\frac{2}{5-2/l} = \frac{6}{7}$

7. Lös ut  $f$ :  $-\frac{x}{5} + \frac{2}{f} = \frac{1}{l}$

8.  $\frac{(5-3)/7}{2/(3x-1)} = 5$

9.  $\frac{5+y}{2+x} = \frac{6y}{1+x}$

10.  $\frac{x-1}{18} = \frac{x-3}{8} - \frac{x-5}{12}$

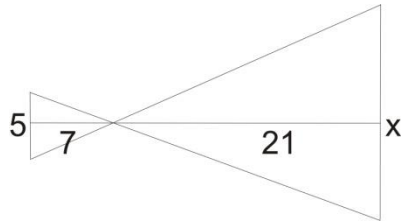
11. Sätt upp ekvationen för antalet bakterier i ett labb som funktion av tid, givet att de är 10 000 från början per skål och att varje timme delas en bakterie och blir två.

12. En rektangulär hage med en area på 40 m<sup>2</sup> skall stänglas in. Stängslet kostar 10 kr/meter. Sätt upp en ekvation för stängslets pris som en funktion av kortaste sidans längd.

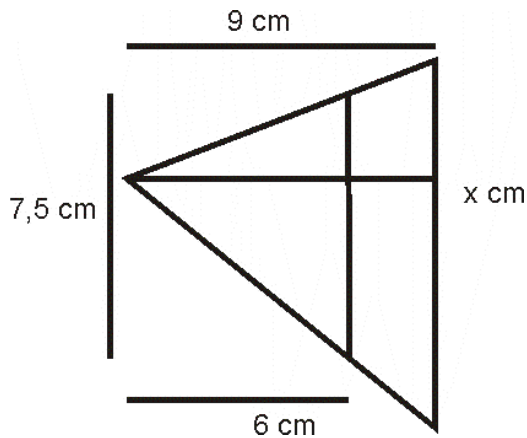
13. Av 40 elever i en klass är det hälften av pojkarna och en tredjedel av flickorna som kommer i tid till lektionen. Totalt är det tre åttondelar som kommer i tid. a) Sätt upp en ekvation som beskriver problemet, där  $x$  är antalet pojkar. b) Hur många pojkar finns i klassen?

## Geometri – likformiga trianglar

1. Beräkna höjden  $x$  i figuren nedan.



2. Beräkna  $x$

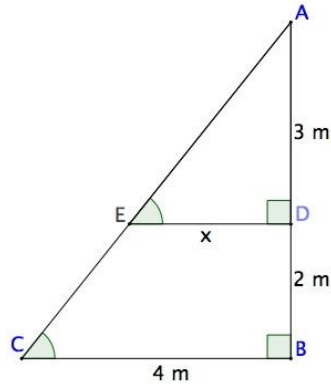


3. En triangel med basen 4 cm och höjden 6 cm är likformig med en triangel med höjden 30 cm. Vad är den andra triangelns bas?

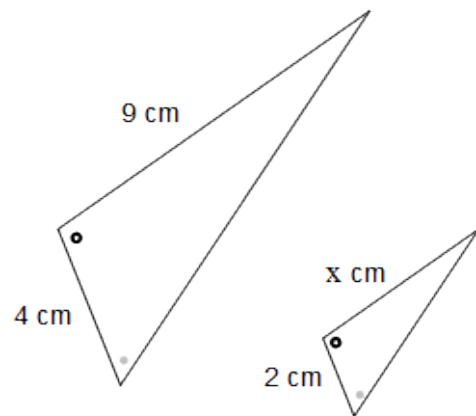
4. Skuggan av en flaggstång på den horisontella marken är 17,2 m lång, samtidigt som en meterlång käpp kastar en skugga som är 1,23 m. Hur hög är flaggstängen?

5. En 3 m lång bil får precis plats inom en persons synfält om den står 2 m bort. Hur nära kan en 9 m lång lastbil stå och ändå få plats inom synfältet?

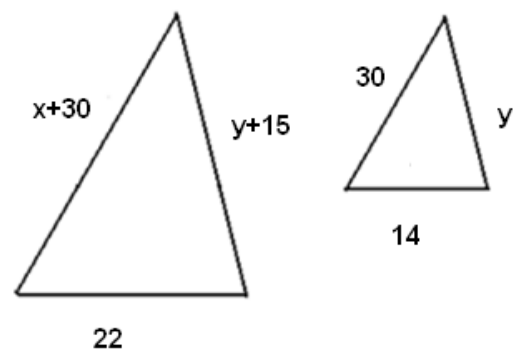
6. Beräkna sträckan  $x$ :



7. Beräkna sträckan  $x$



8. Beräkna sträckorna  $x$  och  $y$  (cm).



## Trigonometri

1. Beräkna hypotenusans längd i en rätvinklig triangel med vinkeln  $60^\circ$  och närliggande katet 4 cm.
2. Beräkna motstående katets längd i en rätvinklig triangel med en 10 cm hypotenusans och vinkel  $45^\circ$ .
3. Beräkna arean av en rätvinklig triangel med vinkeln  $20^\circ$  och motstående katet 10 cm.
4. Beräkna omkretsen av en rätvinklig triangel med vinkeln  $30^\circ$  och närliggande katet 6 cm.
5. Beräkna vinkeln i en rätvinklig triangel med närliggande katet 5 cm och motstående katet 4 cm.
6. Beräkna vinkeln i en rätvinklig triangel med hypotenusans 8 cm och närliggande katet 5 cm.
7. Uttryck följande vinklar i radianer:  
a)  $1^\circ$ , b)  $45^\circ$ , c)  $180^\circ$ , d)  $6^\circ$ .
8. Uttryck följande vinklar (givna i radianer) i grader: a) 1, b)  $2\pi/3$  c) 0.15 d)  $-3\pi/2$ .
9. Bestäm utan miniräknare. Vinklarna är angivna i radianer.
  - a.  $\sin(0)$
  - b.  $\sin(\pi/2)$
  - c.  $\sin(\pi)$
  - d.  $\sin(3\pi/2)$
  - e.  $\cos(0)$
  - f.  $\cos(\pi/2)$
  - g.  $\cos(\pi)$
  - h.  $\cos(3\pi/2)$
  - i.  $\sin(2\pi)$
  - j.  $\cos(2\pi)$ .
10. Rita upp  $4\sin(2x-40)$ .
11. Rita upp  $0.5\cos(x/2+20)$ .

## Proportionalitet och procenträkning

Nedan visas ett antal funktioner  $y(x)$ . Beskriv hur värdet av  $y$  ändras när  $x$  ändras som beskrivet.

1.  $y = 3x^2$ ,  $x$  dubblas.
2.  $y = r^3x + 2k^2x$ ,  $x$  fyrdubblas.
3.  $y \propto \frac{1}{x}$ ,  $x$  fyrdubblas.
4.  $y = \sqrt{x(12+k)}$ ,  $x$  minskar till en fjärdedel.
5.  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ ,  $r$  tredubblas. Hur ändras  $V$ ?
6.  $f = \frac{3+s}{z^2}$ ,  $z$  halveras. Hur ändras  $f$ ?
7.  $A$  är omvänt proportionell mot  $B$ . Hur ändras  $A$  om  $B$  växer med 50 %? Svara i procent.
8. En lins avbildar ett punktformigt objekt på en skärm. Man vet att bildens storlek i detta fall är proportionell mot linsens diameter upphöjt till tre. Hur förändras bildstorleken om linsens diameter minskas till hälften?

Beskriv med hur många procent slutpriset ökat eller minskat jämfört med utgångspriset, givet prisförändringarna nedan.

9. 1) Ökning med 100 %,  
2) Ökning med 100 %.

10. 1) Ökning med 50 %,  
2) Minskning med 50 %.

11. 1) Minskning med 100 %,  
2) Ökning med 30 %.

12. 1) Minskning med 20 %,  
2) Ökning med 20 %,  
3) Ökning med 20 %.

13. 1) Ökning med 100 %,  
2) Minskning med 75 %,  
3) Minskning med 20 %.

## Extrauppgifter

Dessa uppgifter är avsedda för studenter som snabbt tagit sig igenom tidigare uppgifter och vill ha några till att räkna på.

1. Lös ekvationssystemet, med avseende på  $L$  och  $L'$ :

$$6L - L' = 5$$

$$L + L' = 2.$$

(Vi kommer ofta att behöva använda två ekvationer för att lösa en optikuppgift, även om vi inte kallar det för ett "ekvationssystem".)

2. Lös ekvationssystemet, med avseende på  $L$  och  $L'$ :

$$L + 5L' = 2F$$

$$L + 3L' = F$$

3. Beräkna utan miniräknare

a)  $(-2)^3$

c)  $1^{17}$

b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

d)  $5y^0$

4. Ett 27" cykelhjul (diameter 68.6 cm) rullar sträckan 75 cm. Med vilken vinkel har hjulet vridit sig? Svara både i grader och i radianer.

5. En rätvinklig triangel har en vinkel  $\theta$  så att  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ . Beräkna a)  $\cos \theta$  och b)  $\tan \theta$ , utan att använda miniräknare.

6. Du tittar på den här A4-sidan rakt uppifrån. Hur mycket mindre ser sidan ut att vara, om du lutar den (eller dig själv) 30 grader?

7. Om en sida i en triangel förlängs åt båda hållen uppkommer två yttervinklar, som är  $120^\circ$  respektive  $70^\circ$ . Bestäm triangelns vinklar!

8. En 30 m lång hagtornshäck klipps ned 2 m. Hur mycket större blir då den solbelysta markens area innanför häcken vid den tidpunkt, då solen står  $30^\circ$  över horisonten och dess strålar går vinkelrätt mot häckens längdriktning?
9. Kalle sitter på stranden  $a$  meter från vattnet. Pelle sitter på samma strand, också han  $a$  meter från vattnet,  $b$  meter längre bort. Kalle tänker gå till Pelle, men på vägen ska han hämta vatten. Var ska han gå ner till vattnet för att gångsträckan ska bli så kort som möjligt?

## Andragradsekvationer

I kommande kurser kommer andragradsekvationer att dyka upp i vissa B-tal, samt i kursen Instrumentoptik i tvåan. För att lösa andragradsekvationer kan man använda pq-formeln som lyder:

$$\text{Om } x^2 + px + q = 0 \text{ så är } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beräkna  $x$  med hjälp av pq-formeln:

10.  $x^2 + 4x + 3 = 0$

11.  $x + 1 = 6x^2$

12.  $x(10x - 1) = 2$

13.  $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{x+13}{3x}$